



POLITECHNIKA  
LUBELSKA  
WYDZIAŁ MATEMATYKI  
I INFORMATYKI TECHNICZNEJ

Katedra Matematyki Stosowanej

# Praca inżynierska

na kierunku *inżynieria i analiza danych*

Tytuł pracy

The title of the work

Imię0 Nazwisko0

numer albumu: 0234532

promotor: prof. dr hab. Imię1 Nazwisko1

promotor pomocniczy: dr Imię2 Nazwisko2

Lublin 2024







## Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	5
<b>Rozdział 1. Twierdzenie Rosenkrantza i jego rola we współczesnej nauce</b> . . . . .	9
1.1. Podstawy teoretyczne . . . . .	9
1.2. Zastosowania twierdzenia . . . . .	12
1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych . . . . .	13
1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego . . . . .	14
<b>Rozdział 2. Optymalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł     jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy</b>	17
2.1. Szokujące porównanie . . . . .	17
2.2. A nie, to ja się pomyliłem . . . . .	22
<b>Podsumowanie i wnioski</b> . . . . .	31
<b>Bibliografia</b> . . . . .	33
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	35
<b>Spis tabel</b> . . . . .	37
<b>Załączniki</b> . . . . .	39
<b>Streszczenie (Summary)</b> . . . . .	41







## Wstęp

Na początku zwrócę uwagę na sposób cytowania literatury [1], lub [2, 5]. A teraz ubogaceni w tą wiedzę – czytajcie dalej.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi kon-



sekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wiel-



kiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.







## **Rozdział 1**

### **Twierdzenie Rosenkrantza i jego rola we współczesnej nauce**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

#### **1.1. Podstawy teoretyczne**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek



prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Definicja 1.1.** Kulą domkniętą w przestrzeni metrycznej  $(X, \rho)$  o środku w punkcie  $x_0 \in X$  i o promieniu  $r$  nazywamy zbiór  $\{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$ .

**A przy okazji to zerknijcie na rysunek 2.1 na stronie 25.**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.1** (Pitagorasa i odwrotne do tw. Pitagorasa). *Niech  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  będą elementami przestrzeni  $\mathbb{L}$  z iloczynem skalarnym.*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ są ortogonalne.}$$

*Dowód.* Załóżmy, że zachodzi równość podana w twierdzeniu. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

a więc  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  są ortogonalne.

Założmy teraz, że wektory te są ortogonalne. Wtedy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

zatem równość z powyższego twierdzenia oczywiście zachodzi. □

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami



**Tabela 1.1:** Opis podstawowego ataku

$A$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	...
$S$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$Z^0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	...
$Z^1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	...
$Z^2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	...
...	...										

Źródło: Opracowanie własne

zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak



owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## **1.2. Zastosowania twierdzenia**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami



zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### **1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności?



Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### 1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.2.** *Niech  $\mathbb{V}$  przestrzeń unitarna,  $\mathbb{U}$  jej podprzestrzeń i niech  $\mathbf{f}$  będzie dowolnym elementem z  $\mathbb{V}$ . Element  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  jest optymalny dla  $\mathbf{f}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do podprzestrzeni<sup>1</sup>  $\mathbb{U}$*

W przestrzeniach euklidesowych ortogonalność elementów niezerowych oznacza zwykłą prostopadłość, twierdzenie ma łatwą do zapamiętania interpretację geometryczną, podaną na rysunku 1.1.

*Dowód twierdzenia 1.2.* Przypuśćmy, że  $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{U}$  jest taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Pokażę istnienie elementu  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  który lepiej niż  $\mathbf{h}_0$  aproksymuje  $\mathbf{f}$ .

---

<sup>1</sup> Tzn. dla dowolnego  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  wektor  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbf{h}$



Skoro  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$  to istnieje  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  dla którego

$$\alpha = \langle \mathbf{f} - \mathbf{h}_0, \mathbf{h} \rangle \neq 0.$$

Zdefiniujmy  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  wzorem

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}.$$

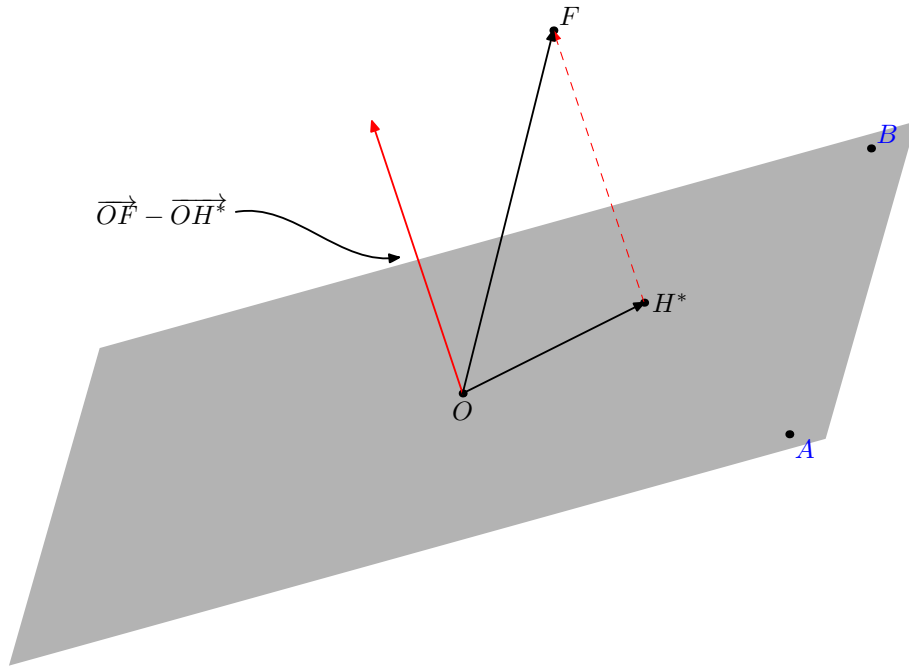
Wyliczamy

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_1\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}_0) - \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\mathbf{h}\|^2} < \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2.$$

Oznacza to, że jeśli  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  miałby być elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$  to na pewno  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Niech więc  $\mathbf{h}^*$  będzie taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Wykażę teraz, że jest to element optymalny dla  $\mathbf{f}$ . Niech bowiem  $\mathbf{g} \in \mathbb{U}$ . Wtedy korzystając z tw. 1.1

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}^*) + (\mathbf{h}^* - \mathbf{g})\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2 + \|\mathbf{h}^* - \mathbf{g}\|^2 \geq \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2.$$

□



**Rysunek 1.1:** Interpretacja tw. 1.2 przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w  $O$  wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni  $OAB$

Źródło: Opracowanie własne

Ponieważ ortogonalność elementu do całej podprzestrzeni  $\mathbb{U}$  jest równoważna jego ortogonalności do każdego elementu z dowolnie wybranej bazy przestrzeni  $\mathbb{U}$ , więc powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku.



*Wniosek 1.1.* Niech  $\mathbb{U}$  będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej  $\mathbb{V}$  i niech układ

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$$

będzie bazą  $\mathbb{U}$ . Niech  $\mathbf{f} \in \mathbb{V}$  i niech

$$\mathbf{h}^* = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n$$

będzie elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$ . Wtedy współczynniki  $\alpha_i$  spełniają równanie

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Okazuje się, że macierz główna układu (1.1) – zwana *macierzą Grama* – jest w przypadku liniowo niezależnego układu  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  nieosobliwa. W interesującej nas sytuacji wektory te stanowią bazę, więc są liniowo niezależne. Wynika stąd, że układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, co daje nam wygodną metodę rachunkową i dodatkowo następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności aproksymacji.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



## Rozdział 2

### **Optimalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

#### **2.1. Szokujące porównanie**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 2.1.** *Zadanie aproksymacji elementu przestrzeni unitarnej elementem jej skończenie wymiarowej podprzestrzeni ma jednoznaczne rozwiązanie.*



### Bazy ortogonalne

Z postaci jaką ma macierz Grama widać, że szczególnie łatwe rozwiązanie zadania aproksymacji uzyskamy, gdy baza podprzestrzeni  $\mathbb{U}$  jest ortogonalna. Wtedy bowiem uzyskamy

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle}{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i \rangle}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

a w przypadku bazy ortonormalnej nawet

$$\alpha_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Pozostaje pytanie, jak w użytecznych dla aproksymacji przypadkach uzyskać bazę ortogonalną bądź ortonormalną. Otóż z bazy ortogonalnej uzyskać bazę ortonormalną jest bardzo łatwo – każdy wektor bazy dzielimy przez jego normę. Metodę uzyskania bazy ortonormalnej z dowolnej bazy otrzymamy analizując dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.2.** *Dla dowolnego układu  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  rozpinający tę samą podprzestrzeń wektorową.*

*Dowód (metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta).* Dowód przeprowadzimy następującą konstrukcją. Na początku  $\mathbf{g}_1$  definiujemy jako  $\mathbf{f}_1$ .

Przypuśćmy, że określiliśmy już element  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla  $i \leq n$ . Wtedy określamy

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j.$$

Z konstrukcji widać, że każdy element  $\mathbf{g}_i$  jest kombinacją liniową elementów typu  $\mathbf{f}_j$  a więc należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory  $\mathbf{f}_j$ . Ale przestrzeń ta jest  $n$ -wymiarowa. Zatem gdyby wektory  $\mathbf{g}_i$  były między sobą liniowo niezależne, to oznaczałoby, że generują identyczną przestrzeń liniową co wektory  $\mathbf{f}_j$ . Zatem dla zakończenia dowodu wystarczy wykazanie ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ , gdyż układ wektorów ortogonalnych na pewno jest liniowo niezależny.

Dowód ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  prowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów w układzie. Dla jednego wektora jest to oczywistość. Przepuśćmy, że własność ortogonalności ma układ  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla pewnego  $i \leq n$ . Pokażemy, że  $\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i \rangle = 0$ , dla  $k < i$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle}{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle} \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

□



Widać więc jasno jak można w standardowych przypadkach z dowolnej bazy skonstruować bazę ortogonalną po to, by w przyszłości w tych przestrzeniach łatwo rozwiązywać zadania aproksymacji. Okazuje się, że często bazy takie stanowią ciągi o łatwej do zapamiętania rekurencyjnej strukturze. Wykorzystywane one są nie tylko w aproksymacji, ale także w całkiem innych zagadnieniach, jak kwadratury (numeryczne całkowanie). Wymienimy kilka podstawowych przypadków. Dla jednolitości zapisu przyjmiemy umowę, że wielomian z numerem „-1” jest równy zero, do bazy oczywiście wchodzi tylko niezerowe wielomiany, tzn. począwszy od numeru 0.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak



owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek



prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



## 2.2. A nie, to ja się pomyliłem

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Tabela 2.1:** Natężenie śmiertelności obliczone za pomocą wybranych modeli parametrycznych

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
10	0,00014	0,00019	-0,00005	0,00009	0,00005
11	0,00012	0,00021	-0,00009	0,00012	0,00000
12	0,00015	0,00022	-0,00007	0,00015	0,00000
13	0,00018	0,00024	-0,00006	0,00018	0,00000
14	0,00027	0,00026	0,00001	0,00021	0,00006
15	0,00032	0,00029	0,00003	0,00025	0,00007
16	0,00033	0,00031	0,00002	0,00029	0,00004
17	0,00047	0,00034	0,00013	0,00034	0,00013
18	0,00065	0,00037	0,00028	0,00039	0,00026

kontynuacja na następnej stronie...



kontynuacja...

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
19	0,00066	0,00040	0,00026	0,00045	0,00021
20	0,00072	0,00044	0,00028	0,00051	0,00021
21	0,00068	0,00048	0,00020	0,00057	0,00011
22	0,00072	0,00052	0,00020	0,00064	0,00008
23	0,00071	0,00056	0,00015	0,00071	0,00000
24	0,00067	0,00061	0,00006	0,00079	-0,00012
25	0,00066	0,00067	-0,00001	0,00087	-0,00021
26	0,00072	0,00073	-0,00001	0,00096	-0,00024
27	0,00070	0,00079	-0,00009	0,00106	-0,00036
28	0,00076	0,00086	-0,00010	0,00115	-0,00039
29	0,00077	0,00094	-0,00017	0,00126	-0,00049
30	0,00094	0,00102	-0,00008	0,00137	-0,00043
31	0,00097	0,00111	-0,00014	0,00148	-0,00051
32	0,00102	0,00121	-0,00019	0,00160	-0,00058
33	0,00107	0,00131	-0,00024	0,00172	-0,00065
34	0,00118	0,00143	-0,00025	0,00185	-0,00067
35	0,00142	0,00156	-0,00014	0,00199	-0,00057
36	0,00134	0,00169	-0,00035	0,00213	-0,00079
37	0,00151	0,00184	-0,00033	0,00228	-0,00077
38	0,00175	0,00200	-0,00025	0,00243	-0,00068
39	0,00205	0,00218	-0,00013	0,00259	-0,00054
40	0,00213	0,00237	-0,00024	0,00276	-0,00063
41	0,00254	0,00258	-0,00004	0,00293	-0,00039
42	0,00267	0,00281	-0,00014	0,00311	-0,00044
43	0,00273	0,00306	-0,00033	0,00329	-0,00056
44	0,00308	0,00333	-0,00025	0,00348	-0,00040
45	0,00353	0,00362	-0,00009	0,00368	-0,00015
46	0,00382	0,00394	-0,00012	0,00388	-0,00006
47	0,00435	0,00428	0,00007	0,00409	0,00026
48	0,00481	0,00466	0,00015	0,00431	0,00050
49	0,00514	0,00507	0,00007	0,00453	0,00061
50	0,00592	0,00552	0,00040	0,00476	0,00116

kontynuacja na następnej stronie...



kontynuacja...

Dane statystyczne		Gompertz		Weibull	
Wiek	$\mu_t$	$\mu_t$	$e_t$	$\mu_t$	$e_t$
51	0,00639	0,00601	0,00038	0,00500	0,00139
52	0,00686	0,00654	0,00032	0,00524	0,00162
53	0,00755	0,00711	0,00044	0,00549	0,00206
54	0,00819	0,00774	0,00045	0,00575	0,00244
55	0,00873	0,00842	0,00031	0,00601	0,00272
56	0,00961	0,00916	0,00045	0,00628	0,00333
57	0,01051	0,00997	0,00054	0,00656	0,00395
58	0,01143	0,01085	0,00058	0,00685	0,00458
59	0,01196	0,01180	0,00016	0,00714	0,00482

Źródło: Opracowanie własne

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak oświeceni urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

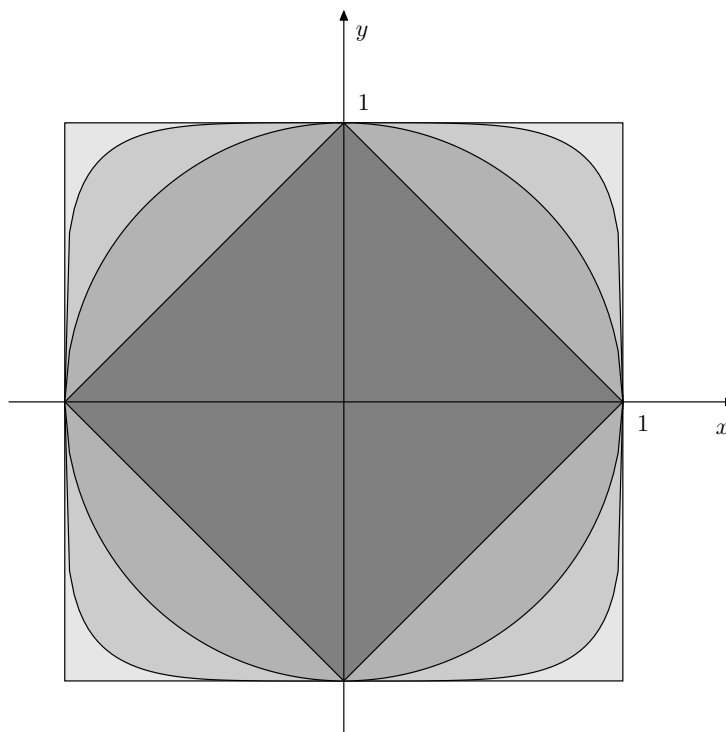
Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wiel-



**Tabela 2.2:** Szalenie pracochłonne wyliczenia

<i>co liczone</i>		<i>wynik</i>
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 5$	0,036783
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 20$	0,027285
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 40$	0,025807
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 100$	0,024935
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 1000$	0,024417
.....		
$\int_0^W \exp\left(-\frac{B}{s^2}\right) ds$		0,024360

Źródło: Opracowanie własne

**Rysunek 2.1:** Różne kule w  $\mathbb{R}^2$ 

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [7]



kiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

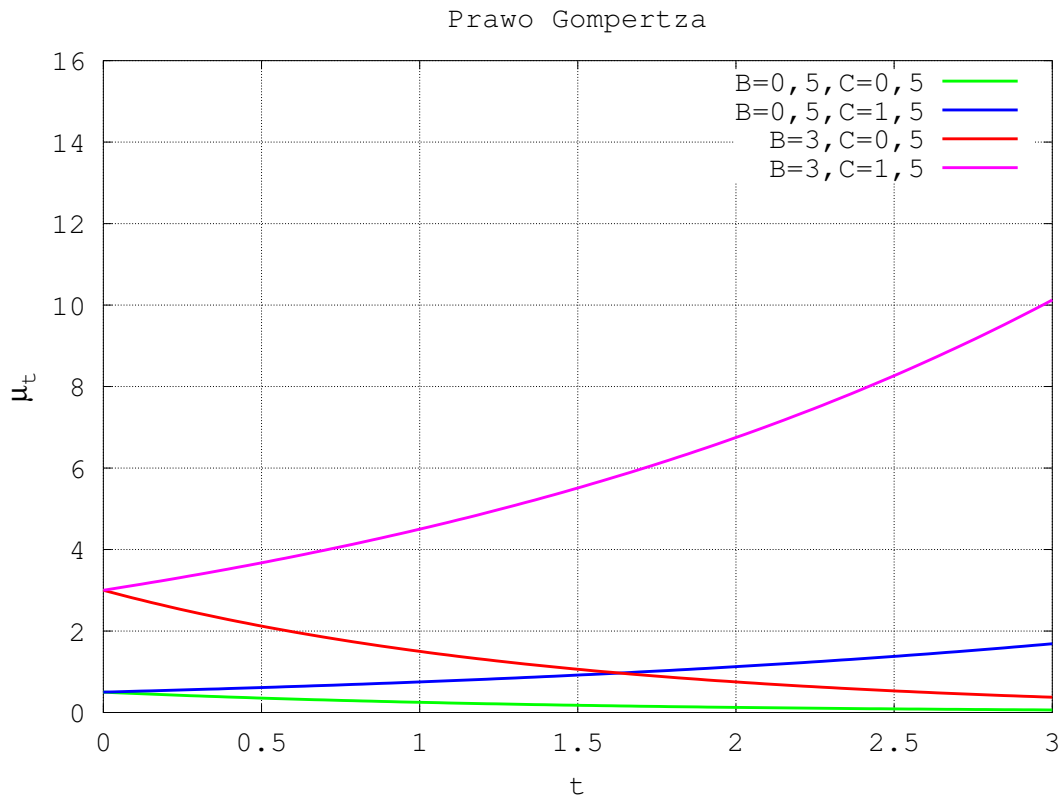
Następujący fragment programu w *Octave*

```

1  t=linspace(0,3,100);
2  m1=0.5*0.5.^t;
3  m2=0.5*1.5.^t;
4  m3=3*0.5.^t;
5  m4=3*1.5.^t;
6  plot(t,m1,"linewidth",6,"-2;B=0,5,C=0,5";t,m2,"linewidth",6,\
7      "-3;B=0,5,C=1,5";t,m3,"linewidth",6,"-1;B=3,C=0,5";t,m4,\
8      "linewidth",6,"-4;B=3,C=1,5");
9
10 grid on;
11 xlabel("t");
12 ylabel("\mu_t");
13 title("Prawo Gompertza");
14 axis([0 3 0 16]);
15
16 print('gom.pdf','-F:15');
```

wygenerował rysunek 2.2. Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.





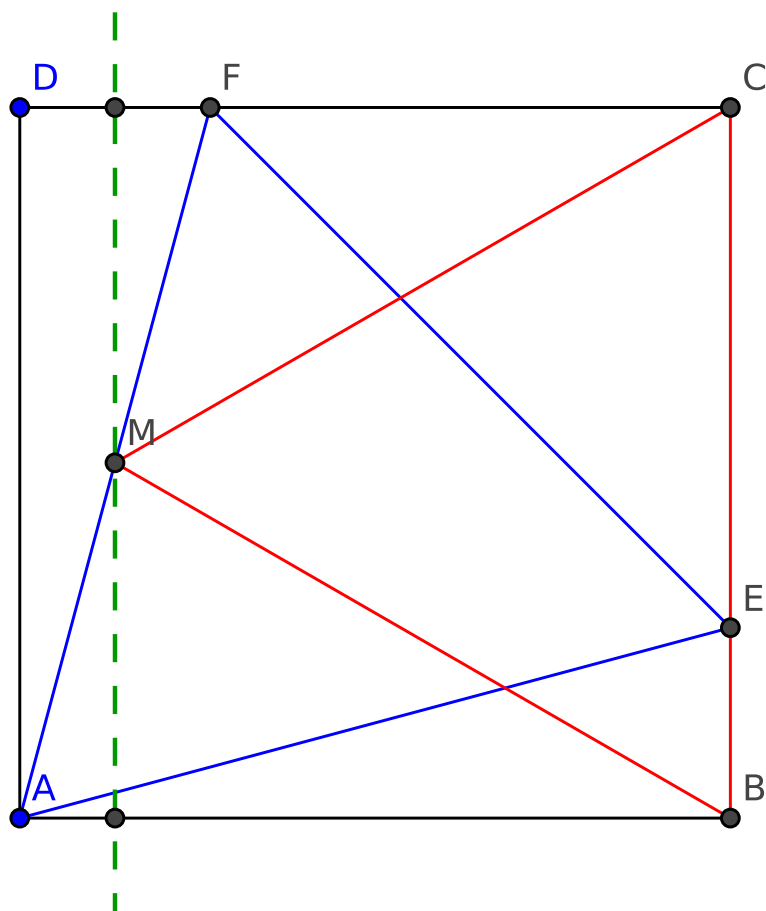
**Rysunek 2.2:** Natężenie śmiertelności  $\mu_t$  w modelu Gompertza

Źródło: Opracowanie własne

Na rysunku 2.3 możemy zauważyć dwa trójkąty równoboczne. Wielkie mi odkrycie. Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności?





**Rysunek 2.3:** Kwadracik, ilustrujący rozwiązanie zadania

*Źródło:* [4]

Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wiel-



kiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



## Podsumowanie i wnioski

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak



owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



## Bibliografia

- [1] T. Beth, F. C. Piper, *The Stop-and-Go Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '84, LNCS vol. 209, 88–92, Springer-Verlag, 1985
- [2] W. Chambers, D. Gollmann, *Clock-Controlled Shift Registers: A Review* IEEE J. Selected Areas Comm., 7(4): 525–533, May 1989 P. R. Geffe, *How to Protect Data with Ciphers That Are Really Hard to Break* Electronics, Jan. 4, 99–10, 1973
- [3] Jovan Dj. Golič, Luke O'Connor, *Embedding and Probabilistic Correlation Attacks on Clock-Controlled Shift Registers* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, 230–243, Springer-Verlag, 1995
- [4] Matthias Krause, Stefan Lucks, Erik Zenner, *Improved Cryptanalysis of the Self-Shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP 2001, LNCS vol. 2119, 21–35, Springer-Verlag, 2001.
- [5] W. Meier, O. Staffelbach, *The Self-shrinking Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, 205–214, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Miodrag Mihaljevic, *A Faster Cryptanalysis of the Self-shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP '96, LNCS vol. 1172, 182–188, Springer-Verlag, 1996.
- [7] W. Otto, *Ubezpieczenia majątkowe. Część I Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [8] T. R. N. Rao, Chung-Huang Yang, Kencheng Zeng, *An Improved Linear Syndrome Algorithm in Cryptanalysis With Applications* Advances in Cryptology – CRYPTO '90, LNCS vol. 537, 34–47, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Erik Zenner, *On the Efficiency of the Clock Control Guessing Attack* Information Security and Cryptology – ICISC 2002, LNCS vol. 2587, 200–212, Springer-Verlag, 2003.
- [10] R. Dutak, W. Wzekly, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych*, Uniwersytet Paragwajski, <http://www.math.uni.up/gracias/seniores>, stan w dniu 5.03.2012 r.







## Spis rysunków

1.1	Interpretacja tw. 1.2 przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w $O$ wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni $OAB$ . . . . .	15
2.1	Różne kule w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	25
2.2	Natężenie śmiertelności $\mu_t$ w modelu Gompertza . . . . .	27
2.3	Kwadracik, ilustrujący rozwiązanie zadania . . . . .	28







## Spis tabel

1.1	Opis podstawowego ataku . . . . .	11
2.1	Natężenie śmiertelności obliczone za pomocą wybranych modeli parametrycznych . . .	22
2.2	Szalenie pracochłonne wyliczenia . . . . .	25







## **Załączniki**

1. Płyta CD z niniejszą pracą w wersji elektronicznej.







## Streszczenie (Summary)

### Tytuł pracy

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### *The title of the work*

*Nor again is there anyone who loves or pursues or desires to obtain pain of itself, because it is pain, but because occasionally circumstances occur in which toil and pain can procure him some great pleasure. To take a trivial example, which of us ever undertakes laborious physical exercise, except to obtain some advantage from it? But who has any right to find fault with a man who chooses to enjoy a pleasure that has no annoying consequences, or one who avoids a pain that produces no resultant pleasure? On the other hand, we denounce with righteous indignation and dislike men who are so beguiled and demoralized by the charms of pleasure of the moment, so blinded by desire, that they cannot foresee the pain and trouble that are bound to ensue.*